# UMA INTRODUÇÃO AOS CONJUNTOS ALGÉBRICOS: DEFINIÇÕES E APLICAÇÕES

**Gilberto Azevedo André[1]; Carlos Eduardo Soares de Maria[2]; Edvalter da Silva Sena Filho[3]**

[1] Licenciando em Matemática, CCET, UVA. E-mail: gil159951@gmail.com,
[2] Docento do curso de Matemática, CCET, UVA. E-mail: eduardosdm.cesdm@gmail.com
[3] Docento do curso de Matemática, CCET, UVA. E-mail: edvalter_silva@uvanet.br

**Resumo:** A Geometria Algébrica pode ser associada a uma ponte que conecta a Geometria com a Álgebra. Ela estuda objetos geométricos usando ferramentas e técnicas da álgebra, permitindo que problemas geométricos sejam abordados de maneira mais estruturada. Assim como também estuda interpretações geométricas para problemas algébricos. Este trabalho se propõem a apresentar, de forma introdutória, os Conjuntos Algébricos, por meio de resolução de problemas. Essa pesquisa tem caráter exploratória e bibliográfica. Atividades que estimulam a resolução de problemas promovem a compreensão conceitual em vez de memorização. Os alunos não apenas aplicam fórmulas, mas entendem por que e como as fórmulas funcionam.

**Palavras-chave:** Geometria algébrica, Conjuntos algébricos, Resolução de Problemas.

## INTRODUÇÃO E OBJETIVO(S)

Um polinômio $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma expressão algébrica que é uma soma de termos, onde cada termo é o produto de uma constante chamada coeficiente e uma ou mais variáveis elevadas a expoentes inteiros não negativos. A forma geral de um polinômio real é

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$. Caso $a_n \neq 0$, diremos que esse polinômio tem grau $n$. Isto é, o grau do polinômio é determinado pelo maior expoente dos seus monômios. Esse polinômio tem apenas uma variável $x$. Caso o polinômio tenha duas variáveis, ele pode ser definido como sendo

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x^{a_{i1}} y^{a_{i2}} = c_1 x^{a_{11}} y^{a_{12}} + c_2 x^{a_{21}} y^{a_{22}} + \cdots + c_n x^{a_{n1}} y^{a_{n2}}$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, n$ e $(a_{i1}, a_{i2}) \in \mathrm{N} \times N$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Por questão de simplicidade, estaremos trabalhando no espaço $\mathbb{R}^2$. Porém, todas as definições apresentadas no decorrer deste trabalho valem para o espaço $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Sejam $p, q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções polinomiais. A soma $p + q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e o produto $p.q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ desses polinômios continua sendo uma função polinomial.

Diremos que um número $\alpha \in \mathbb{R}^2$ é uma raiz real de um polinômio $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ quando $p(\alpha) = 0$. Por exemplo, o polinômio $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $p(x, y) = x^2 + y^2$, só admite $\alpha = (0,0)$ como solução real. Abaixo, no Quadro 1, é apresentado exemplos de funções polinomiais com suas respectivas raízes.

**Quadro 1**: Raízes da equação polinomial

| Polinômio $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ | Solução |
|---|---|
| $p(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ | Não admite solução real |
| $p(x, y) = x^2 + y^2$ | Admite somente (0,0) como raiz real |
| $p(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2$ | Admite somente $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ como raiz real. |
| $p(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ | Admite infinitas raízes reais. |

**Fonte:** Elaborada pelos autores

A Matemática exige prática, perseverança e engajamento contínuo. Muitos educadores promovem abordagens ativas de ensino e aprendizagem, como a resolução de problemas. Pois, é no processo da busca de soluções que o aluno consegue, de forma involuntária, criar raízes do conhecimento matemático.

Conforme Lupinacci e Botin (2004), a resolução de problemas exige que os alunos apliquem o pensamento lógico e raciocínio crítico para encontrar soluções. Eles precisam identificar os elementos-chave do problema, considerar diferentes abordagens e avaliar suas escolhas. Essa metodologia torna o aluno mais engajado, participativo.

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar, de forma introdutória, os conjuntos algébricos, por meio de resolução de problemas. Essa pesquisa tem caráter exploratória e bibliográfica. Para fundamentar esse trabalho, foram realizadas pesquisas em dissertações, artigos e livros. Caso o leitor queira fazer um estudo mais profundo, sugerimos a leitura dos seguintes materiais Hartshorne (2008), Cameron (2008) e Gularte (2021).

Conjuntos algébricos não é um dos assuntos, na área da matemática, mais difundidos na língua portuguesa. Os materiais que mais se aprofundam sobre esse assunto estão escritos na língua inglesa. Portanto, um trabalho que se propõem a apresentar definições, conceitos e propriedades relacionados a esse assunto, na língua portuguesa, já tem sua certa relevância.

## MATERIAL E MÉTODOS

Um conjunto algébrico, também conhecido como variedade algébrica, é definido como sendo o conjunto de zeros (ou raízes) de função polinomial. Em outras palavras, um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é dito algébrico quando for formado por pontos do espaço $\mathbb{R}^2$ que anulem uma equação polinomial. Essas equações polinomiais são chamadas de equações da variedade algébrica.

Por exemplo, considere a equação polinomial $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dado por $f(x, y) = x^2 - y^2$. Assim, o conjunto $X = f^{-1}(0)$ é dito um conjunto algébrico. Ou seja, o conjunto formado pelos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $x = y$ ou $x = -y$ será um conjunto algébrico.

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{x} = \mathrm{y} \text{ ou } \mathrm{x} = -\mathrm{y}\}$$

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ também pode ser definido como sendo um conjunto algébrico, caso existam funções polinomiais $p_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2, \dots, k$ tais que

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{p}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{p}_2(\mathrm{x}) = \cdots = \mathrm{p}_\mathrm{k}(\mathrm{x}) = 0\}$$

A saber, basta definir uma nova função polinomial $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $p(x) = p_1^2(x) + p_2^2(x) + \cdots + p_k^2(x)$. Portanto, $X = p^{-1}(0)$, mostrando então que essas definições são equivalentes. Outro exemplo de conjunto algébrico é a cúspide

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{x}^3 = -\mathrm{y}^2\} \subset \mathbb{R}^2$$

Para verificar isso, defina a função polinomial $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pondo $p(x, y) = x^3 + y^2$. Considere agora $X$, $Y \subset \mathbb{R}^2$ dois conjuntos algébricos. Mostraremos que a união e interseção desses conjuntos continuam sendo conjuntos algébricos. Ora, como os conjuntos são algébricos, existem duas funções polinomiais $p, q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tais que

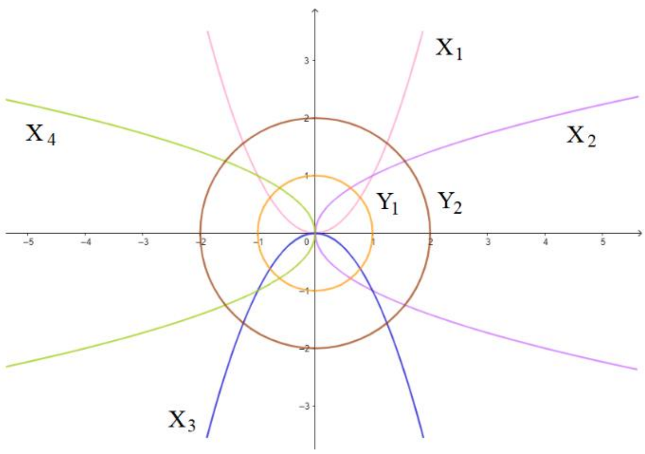
$$X = p^{-1}(0) \quad e \quad Y = q^{-1}(0)$$

Defina as funções $h, m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pondo $h(x) = p(x).q(x)$ e $m(x) = p(x)^2 + q(x)^2$. Note que $x_0$ é raiz da função polinomial $h$ se, e somente se, $x_0$ é raiz da função polinomial $p$ ou se $x_0$ é raiz da função polinomial $q$. De modo análogo, percebe-se que $y_0$ é raiz da função polinomial $m$ se, e somente se, $y_0$ é raiz da função polinomial $p$ e raiz da função polinomial $q$. Ou seja, temos

$$X \cup Y = h^{-1}(0) \quad e \quad X \cap Y = m^{-1}(0)$$

Esses resultados podem colaborar no momento no qual se deseja verificar se o conjunto é ou não algébrico. Isto é, uma estratégia a ser adotada é enxergar o conjunto em questão, como união ou interseção de outros conjuntos algébricos.

**Figura 1**: Representação geométrica do conjunto $Z \subset \mathbb{R}^2$




**Fonte**: Elaborada pelos autores

Note, na Figura 1, que temos que conjunto analisado, pode ser representado pela união de outros conjuntos. A saber, defina as funções polinomiais $p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira,

$$p_1(x,y) = y - x^2;\ \ p_2(x,y) = y^2 - x;\ \ p_3(x,y) = y + x^2;\ \ p_4(x,y) = y^2 + x$$

$$q_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1;\ \ q_2(x,y) = x^2 + y^2 - 4$$

Note que,

$$X_1 = \mathrm{p}_1^{-1}(0);\ X_2 = \mathrm{p}_2^{-1}(0);\ X_3 = \mathrm{p}_3^{-1}(0);\ X_4 = \mathrm{p}_4^{-1}(0);\ Y_1 = \mathrm{q}_1^{-1}(0);\ Y_2 = \mathrm{q}_2^{-1}(0)$$

Portanto, o conjunto $\mathrm{Z} = \mathrm{X}_1 \cup \mathrm{X}_2 \cup \mathrm{X}_3 \cup \mathrm{X}_4 \cup \mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2$ será um conjunto algébrico, pois o mesmo pode ser expresso como sendo união de conjuntos algébricos. Além disso, podemos construir a função polinomial que gera o conjunto Z. A saber, defina $\lambda: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\lambda(x,y) = (y - x^2)(y^2 - x)(y + x^2)(y^2 + x)(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)$$

Outro exemplo de conjuntos algébricos são os gráficos das funções polinomiais $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para isso, basta definir a função polinomial $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, pondo

$$h(x,y,z) = p(x,y) - z$$

Portanto, teríamos

$$h^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x,y,z) = 0\}$$

$$h^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid p(x,y) - z = 0\}$$

$$h^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathrm{z} = p(x,y)\}$$

$$h^{-1}(0) = graf(p) \subset \mathbb{R}^3$$

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Geometria Algébrica estabelece uma conexão entre a Geometria e a Álgebra, unificando conceitos aparentemente distintos. Isso permite a análise de objetos geométricos complexos por meio de técnicas algébricas. A seguir serão listaremos alguns resultados que podemos obter com o estudo que foi apresentado.

*Resultado 1***.** A união de conjuntos algébricos continua sendo um conjunto algébrico.

*Resultado 2.* A interseção de conjuntos algébricos continua sendo um conjunto algébrico.
*Resultado 3*. O gráfico de uma função polinomial será um conjunto algébrico.
*Resultado 4*. Uma interpretação geométrica de conjunto de conflito no espaço $\mathbb{R}^2$

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi feito um breve passeio no campo dos conjuntos algébricos, podendo ver definições, conceitos e interpretações geométricas. Também foram apresentadas demonstrações para resultados importantes, através de diferentes abordagens. Portanto, o estudo apresentado, por trazer uma explanação acerca de uma das primeiras ‘’ferramentas’’ da Geometria Algébrica, carrega uma grande importância devido ao fato de a compreensão e caracterização dessas estruturas serem de suma importância para o acadêmico.


## AGRADECIMENTOS

Agradecer meu companheiro de pesquisa Carlos Eduardo Soares de Maria. Ao meu orientador Edvalter da Silva Sena Filho, por fornecer todo o aparato e apoio necessário para se fazer a pesquisa. A minha família por todo suporte e motivação em meus projetos acadêmicos. Agradeço também a FUNCAP pelo apoio financeiro.


## REFERÊNCIAS


CAMERON, P. J. **Introduction to Algebra.** Second Edition, Oxford University Press, Queen Mary, University of London, 2008.

GULARTE, G. G. **Conjuntos algébricos: propriedades e resultados**. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal de Uberlândia Faculdade de Matemática (FAMAT), 2021.

HARTSHORNE, R. **Algebraic geometry**. 14ª ed. Graduate texts in mathematics. New York, NY: Springer, 2008.

LUPINACCI, M. L. V.; BOTIN, M. L. M. **Resolução de problemas no ensino de matemática**. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, p. 1-5, 2004.

NEULAENDER, G.; JARDIM, M. B. **Variedades Algébricas e Esquemas**. XXIX Congresso de Iniciação Científica, UNICAMP, 2021.