# ESPAÇAMENTO UNIFORME: PARAMETRIZANDO CONJUNTOS DE CONFLITOS NO PLANO

**Leonardo Brandão de Araújo[1]; Davi Ribeiro dos Santos[2]; Joserlan Perote da Silva[3]; Edvalter da Silva Sena Filho[4]**

[1] Licenciando em Matemática, CCET, UVA; E-mail: leobrandao743@gmail.com.
[2] Docente do curso de Matemática, CCET, UVA. E-mail:davi_ribeiro@uvanet.br.
[3] Docento do curso de Matemática, UNILAB. E-mail: joserlanperote@yahoo.com.br.
[4] Docento do curso de Matemática, CCET, UVA. E-mail: edvalter_silva@uvanet.br.

**Resumo:** Um lugar geométrico é uma descrição matemática que caracteriza o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma determinada relação ou propriedade. A circunferência, por exemplo, é o lugar geométrico de todos os pontos do espaço $R^2$ que estão a uma distância fixa (raio) de um ponto central (o centro da circunferência). A parametrização, por sua vez, permite representar curvas e superfícies em termos de funções matemáticas. Isso facilita a análise e a descrição de formas geométricas. Portanto, este trabalho tem por objetivo apresentar uma parametrização do conjunto de conflito gerado entre o gráfico da função $f(x) = kx^n$, para n um número par, e eixo das abscissas $(Ox)$. As parametrizações ajudam a compreender o comportamento dos seus conjuntos, permitindo um estudo mais inteno sobre suas propriedades geométricas.

**Palavras-chave:** Conjunto de conflito, conjuntos equidistantes, parametrização de curvas.

## INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

O lugar geométrico descreve o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma determinada relação ou propriedade geométrica. Essa relação pode ser uma equação, uma desigualdade, uma proporção, entre outras. Caso o leitor queira se aprofundar mais sobre lugares geométricos, sugerimos a leitura de Muniz Neto (2022).

**Definição**: *Dada uma propriedade* $\mathsf{P}$ *relativa a pontos do espaço* $R^2$*, o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade* $\mathsf{P}$ *é o subconjunto* $\mathsf{L}$ *do espaço que satisfaz as duas condições a seguir:*
*a) Todo ponto de* $\mathsf{L}$ *possui a propriedade* $\mathsf{P}$*;*
*b) Todo ponto do espaço* $R^2$ *que possui a propriedade* $\mathsf{P}$ *pertence a* $\mathsf{L}$.

Por exemplo, a circunferência é o conjunto de todos os pontos no espaço $R^2$ que estão a uma distância constante de um ponto fixo chamado centro. Essa distância constante é o raio da circunferência. A parábola é o conjunto de todos os pontos do espaço $R^2$, cuja a distância até um ponto $F$ (foco) é igual até uma reta $r$ (diretriz).

Sejam A um subconjunto não-vazio do espaço $R^2$ e $d$: $R^2 \times R^2 \rightarrow R$ a métrica euclidiana. A distância euclidiana do ponto $x \in R^2$ ao conjunto A será denotado por $d(x, A)$ e definida como sendo:

$$d(x, A) = inf\ \{d(x, a) \mid \forall a \in A\}$$

**Definição:** *Sejam A e B dois subconjuntos não-vazio do espaço $R^2$ e $d$ a métrica euclidiana. O conjunto de conflito gerado pelos conjuntos A e B será definido como sendo o conjunto formado pelos pontos do espaço $R^2$ equidistante de A e B. Ou seja,*

$$Conf(A, B) = \{x \in R^2 \mid d(x, A) = d(x, B)\}$$

Wilker (1975) mostra que dados dois conjuntos A e B, não-vazios e conexos do espaço $R^n$, então o conjunto de conflito gerado por esses conjuntos é conexo. Em Siersma (1999), foi demonstrado que dados A e B dois subconjuntos convexos do espaço $R^2$, então o seu conjunto de conflito é um conjunto diferenciável.

Birbrair e Siersma (2007) mostram que o cone tangente de um conjunto de conflito em $R^n$ é um cone afim linear sobre conjuntos de conflitos de menores dimensões, tendo dimensão $n - 1$. Além disso, é dado um exemplo onde os conjuntos de conflitos não são normalmente mergulhados e não localmente bi-Lipschitz equivalente ao cone tangente correspondente.

Segundo Leitão (2002) “um problema clássico é o estudo do conjunto de pontos de igual distância de ambos, tal é o caso da reta e um ponto que leva à parábola”. Na área da matemática conhecida como teoria de singularidades, problemas que envolvem conjuntos equidistantes, são comuns e de grande interesse.

**Definição**: *Sejam $x, y : I \to R$ duas funções contínuas definidas num intervalo $I \subset R$. A função $\lambda: I \to R^2$, dada por $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva parametrizada no plano.*

O parâmetro $t$ pode ser interpretado como o tempo, enquanto as coordenadas $(x(t),\ y(t))$ descreve o movimento da partícula no plano cartesiano. Trabalhar com parametrizações de curvas é interessante em diversos campos da matemática e da ciência, pois permite descrever de maneira precisa o comportamento de curvas.

As parametrizações permitem uma descrição precisa de curvas que podem ser complexas e irregulares. Elas representam uma maneira sistemática de definir a posição de um ponto ao longo da curva em termos de parâmetros, tornando possível representar curvas de forma matemática exata.

Sejam $k$ uma constante real, não nula, e $n \in \mathbb{N}$ um número par. Este trabalho tem como objetivo apresentar a parametrização do conjunto de conflito no espaço $R^2$, entre o gráfico da função $f(x) = kx^n$ e eixo das abscissas $(Ox)$. Além dessa parametrização, será apresentado uma interpretação geométrica desses conjuntos, por meio de casos particulares.

Para a leitura deste trabalho é necessário que o leitor entenda os fundamentos de geometria analítica e cálculo diferencial. Alguns cálculos básicos e simplificações serão omitidos no decorrer do texto, para que esse trabalho não fique sobrecarregado.

## MATERIAL E MÉTODOS

Considere $f\colon R \to R$ uma função do tipo $f(x) = kx^n$, onde $n \in N$ é um número par e $k$ é uma contante não nula. Estamos interessados em encontrar o conjunto de conflito gerado pelo gráfico dessa função $f$ e pelo eixo das abscissas $(Ox)$. Sem perda da generalidade, podemos considerar a constante $k$ como sendo positiva. A demonstração do caso contrário segue de modo análoga.

Primeiramente, iremos encontrar a reta ortogonal a reta tangente ao gráfico da função f que passa pelo ponto (a, f(a)).

$$y = \frac{-1}{f'(a)}(x-a) + f(a) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-x}{f'(a)} + \frac{a + f(a)\,f'(a)}{f'(a)}$$

Como essa reta passa pelo ponto $(x_0, y_0)$ temos que

$$y_0 = \frac{-x_0 + a + f(a)f'(a)}{f'(a)} \qquad (I)$$

Por outro lado, sabemos que

$$d\,((a, f(a)), (x_0, y_0)) = d((x_0, 0), (x_0, y_0)) \quad \Rightarrow \quad d\,((a, f(a)), (x_0, y_0)) = |\ y_0\ |$$

Portanto,

$$(a - x_0)^2 + (f(a) - y_0)^2 = y_0^2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{a^2 - 2ax_0 + x_0^2 + f(a)^2}{2f(a)} \qquad (II)$$

Igualando a equação (I) com a equação (II), temos

$$\frac{-x_0 + a + f(a)f'(a)}{f'(a)} = \frac{a^2 - 2ax_0 + x_0^2 + f(a)^2}{2f(a)}$$

Assim, chegamos na seguinte equação

$$f'(a)x_0^2 - 2(af'(a) - f(a))x_0 - 2af(a) - f(a)^2f'(a) + a^2f'(a) = 0$$

Nesse momento, podemos encontrar o seu discriminante

$$\Delta = [2(af'(a) - f(a))]^2 - 4f'(a)(-2af(a) - f(a)^2f'(a) + a^2f'(a))$$

$$\Delta = 4a^2f'(a)^2 - 8af'(a)f(a) + 4f(a)^2 + 8af(a)f'(a) + 4f(a)^2f'(a)^2 - 4a^2f'(a)^2$$

$\Delta = 4f(a)^2 + 4f(a)^2 f'(a)^2$

$\Delta = 4f(a)^2(1 + f'(a)^2)$

Assim, temos que

$$x_0 = \frac{af'(a) - f(a) \pm f(a)\sqrt{1 + f'(a)^2}}{f'(a)}$$

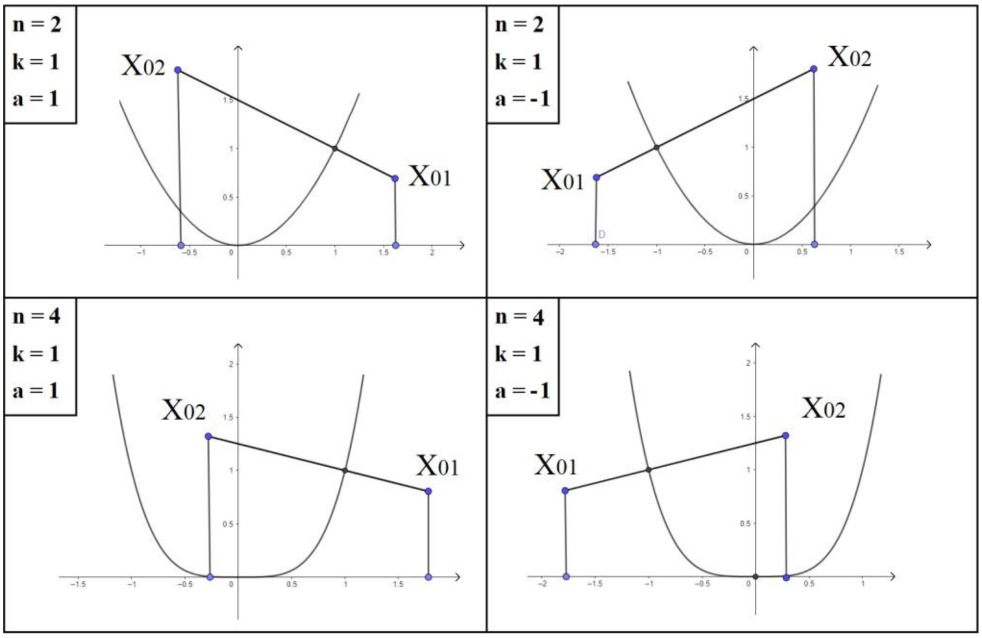
Como $f(x) = kx^n$, temos que $f(a) = ka^n$ e $f'(a) = kna^{n-1}$. Portanto,

$$x_0 = \frac{akna^{n-1} - ka^n \pm ka^n\sqrt{1 + k^2n^2a^{2n-2}}}{kna^{n-1}}$$

$$x_0 = \frac{an - a \pm a\sqrt{1 + k^2n^2a^{2n-2}}}{n}$$

$$x_{01} = \frac{an - a + a\sqrt{1 + k^2n^2a^{2n-2}}}{n} \quad e \quad x_{02} = \frac{an - a - a\sqrt{1 + k^2n^2a^{2n-2}}}{n}$$

**Figura 1**: Representação geométrica dos pontos $x_{01}$ e $x_{02}$ no espaço $R^2$, com relação ao gráfico da função $f(x) = kx^n$ e o eixo das abscissas $(Ox)$, no parâmetro $a$.




**Fonte**: Elaborada pelos autores

Como o expoente da função $f(x) = kx^n$ é um número par, isto é, como $n = 2r$, para algum $r \in N$, temos que o ponto $x_{02}$ não pertencerá ao conjunto de conflito gerado pelos conjuntos graf(f) e Ox, uma vez que $d(x_{02}, graf(f)) \neq \mathrm{d}(x_{o2}, Ox)$. Portanto, quando a função

$f(x) = kx^n$ tiver expoente par, temos

$$y_{01} = \frac{-x_{01} + a + f(a)f'(a)}{f'(a)}$$

$$y_{01} = 1/f'(a)(-x_{01} + a + f(a)f'(a))$$

$$y_{01} = 1/kna^{\,n-1} \left(\frac{-an + a - a\sqrt{1 + k^2n^2a^{2n-2}}}{n} + a + ka^{n}nka^{n-1}\right)$$

$$y_{01} = 1/kna^{n-1} \left(\frac{-an + a - a\sqrt{1 + k^2n^2a^{2n-2}} + an + k^2n^2a^{2n-1}}{n}\right)$$

$$y_{01} = 1/kna^{n-1} \left(\frac{a - a\sqrt{1 + k^2n^2a^{2n-2}} + k^2n^2a^{2n-1}}{n}\right)$$

$$y_{01} = \frac{a - a\sqrt{1 + k^2n^2a^{2n-2}} + k^2n^2a^{2n-1}}{kn^2a^{n-1}}$$

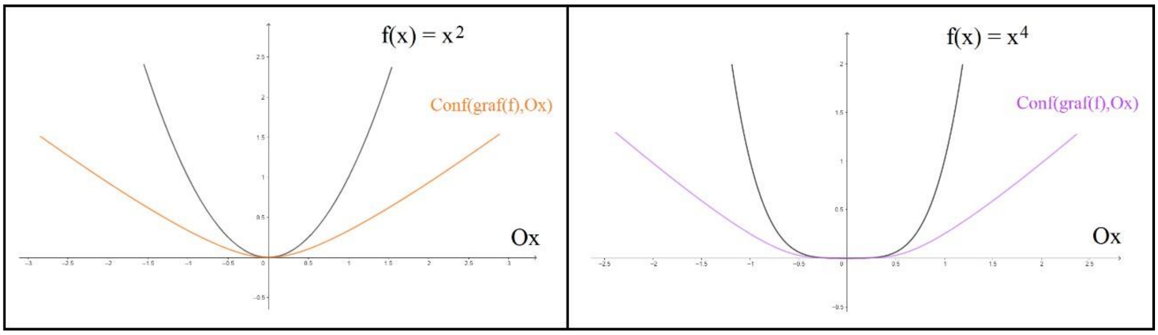
Assim, chegamos na seguinte parametrização.

$$\lambda(\mathrm{t}) = \left(\frac{nt - t + t\sqrt{1 + k^2n^2t^{2n-2}}}{n}, \frac{t - t\sqrt{1 + k^2n^2t^{2n-2}} + k^2n^2t^{2n-1}}{kn^2t^{n-1}}\right) \ \forall\, t \in R \text{ - } \{0\} \ e \ \lambda(0) = 0$$

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como resultado principal desse trabalho obteve-se a parametrização do conjunto de conflito entre o gráfico da função $f(x) = kx^n$, para $n \in N$ um número par, e o eixo das abscissas (Ox).

**Figura 2**: Representação geométrica do conjunto de conflito no espaço R²




**Fonte**: Elaborada pelos autores

Essa pesquisa ainda se mostra muito frutífera, uma vez que existem vários casos a serem estudados. Como por exemplo, o caso geral da função $f(x) = kx^n$, para $n \in N$ qualquer. A priori, acreditava-se que o conjunto de conflito seria obtido de forma similar ao caso de $n \in N$ par. Entretanto, quando o expoente for ímpar, o conjunto de conflito apresenta uma deformidade ao se aproximar da origem.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, exploramos os conjuntos de conflitos. Foi investigado diferentes tipos de conjuntos equidistantes e algumas das suas propriedades. Também foi apresentado a parametrização do conjunto de conflito gerado pelo gráfico da função $f(x) = kx^n$, para $n \in N$ par e o eixo das abscissas (Ox).

Esse estudo contribui para a compreensão dos conjuntos de conflitos no espaço $R^2$, tendo sua relevância na área da geometria, topologia, singularidades. O estudo aprofundado desses conjuntos pode levar a insights importantes e à resolução de problemas matemáticos complexos.

Espera-se que esse trabalho possa estimular pesquisadores a investigarem ainda mais sobre propriedades métricas dos conjuntos de conflitos. Futuras pesquisas podem explorar conjuntos equidistantes em espaços métricos mais gerais ou investigar questões abertas relacionadas a esses conjuntos.

## REFERÊNCIAS

BIRBRAIR, L., SIERSMA, D. **Metric properties of conflict sets**. Houst. J. Math. 35(1), 73–80, 2009.

LEITÃO JÚNIOR, P. J. S. **Geometria das Hipersuperfícies de Conflito**. Dissertação, Mestrado em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), 2001.

MUNIS NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), ed. 2, 2022.

SIERSMA, D. **Properties of conflict sets in the plane**, Geometry and topology of caustics-CAUSTICS ’98 (Warsaw), Polish Acad. Sci., Warsaw, pp. 267–276, 1999.

WILKER, J. B. **Equidistant Sets and their Connectivity Properties.** Proceedings of The American Mathematical Society, v. 47, nº 2, 1975.