# GENERALIZANDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

**Rivaldo Bastos Melo[1]; Davi Ribeiro dos Santos[2];**
**Edvalter da Silva Sena Filho[3]**

[1] Licenciando em Matemática, CCET, UVA; E-mail:
rivaldobastos55@gmail.com,
[2] Docente do curso de Matemática, CCET, UVA.
E-mail: davi_ribeiro@uvanet.br.
[3] Docente do curso de Matemática, CCET, UVA. E-mail:
edvalter_silva@uvanet.br.

**Resumo**: As sequências numéricas desempenham um papel importante na construção de alguns conceitos matemáticos. Podemos citar como exemplo, na introdução de conceitos relacionados a limites, convergências, continuidades e dentre outros. Elas estão inseridas no nosso cotidiano, ao mencionarmos os dias da semana, do ano, ordem nas filas de supermercado. Mergulhado no universo das sequências, iremos destacar aquela apresentada por Fibonacci. Assim, este trabalho tem como objetivo apresentar uma extensão da sequência de Fibonacci, destacando também a lei de formação da sua recorrência. Pesquisas relacioandas a sequências ajudam a compreender padrões, prever comportamentos, tomar decisões informadas e resolver problemas em uma ampla gama de contextos, desde a matemática pura até as aplicações práticas do dia a dia.

**Palavras-chave:** Sequência numéricas, Sequência de Fibonacci, Expansão de Fibonacci.

## INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

As sequências são importantes no nosso dia a dia, podemos encontr-lá na organização de filas, a organização dos dias de um mês ou até mesmo a organização dos meses em um ano, na relação entre o valor pago e a quantidade comprada de um produto, etc.

Iremos definir uma sequência $x_n$ como uma função de domínio natural e contradomínio real, ou seja, $x\colon\ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, onde ao ser dado um valor natural $n$, gera-se uma valor real $x(n) = x_n$. Um exemplo de sequência é a sequência de números pares onde $x_n = 2n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$x_n = (2,4,6,8, \dots ,2n, \dots)$$

Uma sequência pode ser limitada, ou ilimitada. No exemplo acima, conforme o número $n$ aumenta o valor de $x_n$ também aumenta, sendo assim $x_n$ é ilimitado superiormente. Uma sequência $x_n$ é dita limitada quando existir uma constante positiva $M \in \mathbb{R}$, tal que $\mid x_n \mid < M,\ \forall\ n\ \in \mathbb{N}$. Do contrário, caso não exista uma constante com essa propriedade, diremos que a sequência $x_n$ é ilimitada.

No ensino médio temos uma interação maior com as sequências ao estudarmos as progressões aritméticas (P.A) e as progessões geométricas (P.G), a partir delas, o aluno começa a ter contato sobre o que é termos, lei de formação e as sequências que se criam a partir dessas leis de formação. Outro exemplo de sequência numérica é a sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci tem origens na solução de um problema de reprodução de coelhos proposto pelo matemático Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci. Suponha que você adquira um par de coelhos recém-nascidos (um macho e uma fêmea) no mês zero. Os coelhos são reprodutores após dois meses de vida e produzem um novo par de coelhos e, esse processo se repete em cada mês subsequente. Admita que cada novo par de coelhos segue o mesmo padrão de reprodução. Surge então o seguinte questionamento. Quantos pares de coelhoes existirão no n-ésimo mês?

Para resolver esse problema, Fibonacci utilizou um processo de recorrência. Ao término do primeiro mês, existirá apenas um núnico par de coelho. Ao término do segundo mês, continuará existindo apenas um único par de coelho. Ao término do terceiro mês, existirá dois pares de coelhos: um par será fértil e o outro par infértil. Seguindo essa lei de formação, encontramos a seguinte sequência.

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots)$$

Note que, a partir do terceiro mês, a quantidade de pares de coelhos obedecerá o seguinte padrão. Cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos antecessores imediatos. Essa lei de formação é uma recorrência. A saber, esssa recorrência segue o seguinte padrão

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1 \text{ e } x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Assim, este trabalho tem por objetivo apresentar uma extensão da sequência apresentada por Fibonacci. Iremos apresentar também a lei de formação dessa nova sequência, onde a mesma será uma recorrência linear, homogênea, de terceira ordem.

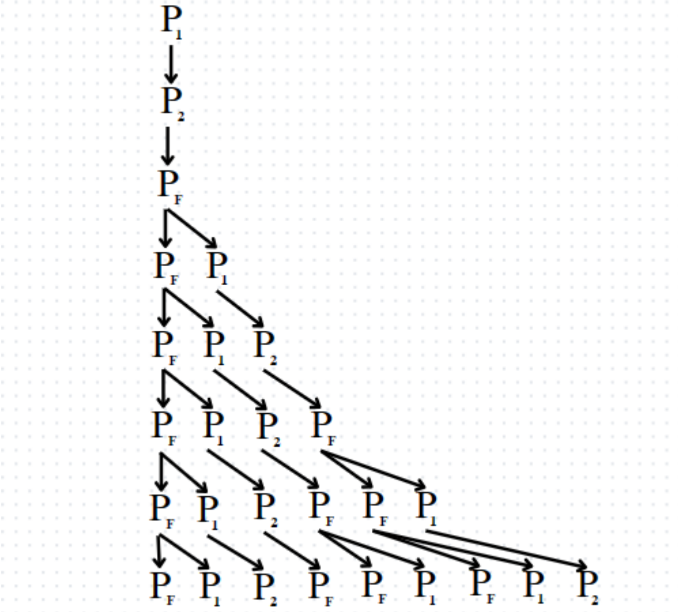
## MATERIAL E MÉTODOS

O método adotado para obter a extensão da sequência de Fibonacci foi norteador por dois parâmetros. O primeiro era de que a alteração na sequência original fosse a mínima possível, mantendo fortes traços da sequência de Fibonacci clássica. O segundo parâmetro era de que precisávamos encontrar a solução dessa nova recorrência e, de preferência, que fosse por meio de uma recorrência de terceira ordem ou superior, diferenciando da de segunda ordem, apresentada por Fibonacci. Nesse trabalho foi feito uma revisão da literatura, por meio de pesquisas em artigos, livros e dissertações, como Lima (1976), Simões (2014), Silva (2014), Brogna (2022) e Belini (2015).

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com base no problema proposto por Fibonacci, iremos apresentar uma sua extensão. Suponha que você adquira um par de coelhos recém-nascidos (um macho e uma fêmea) no mês zero. Os coelhos são reprodutores após ***três*** meses de vida e produzem um novo par de coelhos e, esse processo se repete em cada mês subsequente. Admita que cada novo par de coelhos segue o mesmo padrão de reprodução. Quantos pares de coelhoes existirão no n-ésimo mês? O problema descrito acima gera uma recorrência linear, homogênea, de terceira ordem.

**Figura 1**: Representação da reprodução dos coelhos na sequência de Fibonacci estendida




**Fonte**: Elaborada pelos autores

Note que nos primeiros três meses, temos apenas um par de coelhos, no quarto mês temos dois pares, no quinto temos três pares, no sexto temos quatro pares, no sétimo temos seis pares, no oitavo temos nove pares e assim por diante. A partir desse entendimento, monta-se o quadro 1, onde é possível ver o comportamento desta reprodução.

**Quadro 1**: Recorrência gerada pela sequência de Fibonacci estendida

| Mês | Quantidade de casais | $R_{n+3} = R_{n+2} + R_n$ |
|---|---|---|
| 1º | 1 | $R_1$ |
| 2º | 1 | $R_2$ |
| 3º | 1 | $R_3$ |
| 4º | 2 | $R_4 = R_3 + R_1$ |
| 5º | 3 | $R_5 = R_4 + R_2$ |
| 6º | 4 | $R_6 = R_5 + R_3$ |
| 7º | 6 | $R_7 = R_6 + R_4$ |
| 8º | 9 | $R_8 = R_7 + R_5$ |

**Fonte**: Elaborada pelos autores

Essa nova lei de formação é uma recorrência de terceira ordem, pois se faz necessário informar os valores dos três termos iniciais. Chamamos essa nova sequência de sequência estendida de Fibonacci, pois possui a mesma propriedade da sequência de Fibonacci, com um termo inicial a mais. Ela terá a seguinte lei de formação

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1 \text{ e } x_{n+3} = x_{n+2} + x_n, \ \forall \, n \in \mathbb{N} \quad (I)$$

Resolver uma relação de recorrência significa determinar uma fórmula que fornece o termo geral da sequência, em termos de sua posição na sequência e/ou dos termos anteriores na sequência. Castro (2017) apresenta a solução para as recorrências do tipo (I).

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, apresentamos as sequências numéricas e a importância de seu estudo. Elas desempenham um papel significativo em várias áreas da matemática e em aplicações práticas. As sequências são fundamentais na análise matemática, na teoria dos números, na probabilidade, na estatística e de muitos outros campos.

As sequências de Fibonacci, originárias de uma relação recursiva, é um exemplo de como a matemática pode surgir da observação de padrões naturais e como um conceito simples pode ter aplicações amplas e profundas. Foi apresentado uma extensão da sequência original de Fibonacci, onde foi possível encontrar sua lei de formação e, consequentemente, sua solução, já que se tratava de uma recorrência linear, homogêne de terceira ordem.

Acredita-se que com esse trabalho, fique ainda mais evidente a importância e a riqueza do estudo de sequências numéricas. Além disso, tem-se também a esperança de que o mesmo possa inspirar um maior interesse e investigação nessa área dinâmica da matemática, uma vez que as sequências numéricas desempenham um papel importante no avanço do conhecimento matemático e na promoção da aprendizagem matemática significativa.


## AGRADECIMENTOS

Agradecimendos a PBPU pela ajuda financeira para a pesquisa realizada, agradecer também ao Edvalter da Silva Sena Filho e ao Davi Ribeiro dos Santos pela orientação e o apoio.


## REFERÊNCIAS


LIMA, E. L. **Curso de análise**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, v. 1. 1976.

CASTRO, F. J. D. **Matemática discreta: Tópicos de recorrências Lineares e suas aplicações**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba-UFPB, João pessoa, 2016.

MELO, R. B.; SANTOS, D. R. D.; SENA FILHO, E. D. S. **Soluções de recorrências lineares homogêneas de quarta ordem**. Uberlândia: XXI Semana da Matemática e XI Semana da Estatística, 79-82 p. Resumo expandido apresentado na Conferência. 2021.

SIMÕES, D. A. D. S. **Recorrências: Conceitos e Aplicações**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, 2014.

SILVA. J. S. **Sequência numérica no ensino médio.** Dissertação de mestrado, Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Centro de ciências e tecnologia, 2015.

BROGNA, V. D. A. **Palavras de Fibonacci e seus Fractais**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”-UNESP. 2022.

BELINI, M. M. **A Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci**. Dissertação de Mestrado em Ciências. Universidade de São Paulo-USP, São Carlos, 2015.